MAI 2 Příklady - funkce více proměnných 2 (3. a 4. cvičení)

Diferenciál – další příklady jeho výpočtu a užití :

1. Je dána funkce a) $f(x,y)=\sqrt{x^3+y}$ a bod $[x_0,y_0]=[1,3]$;

   b) $f(x,y)=\arcsin(\frac{y}{x+1})$ a bod $[x_0,y_0]=[0,0]$

   Najděte a načrtněte definiční obor funkce f, vypočítejte $\nabla f(x_0,y_0)$, ukažte, že funkce f má v bodě $[x_0,y_0]$ totální diferenciál a určete jej. Napište rovnici tečné roviny ke grafu f v bodě $[x_0,y_0,f(x_0,y_0)]$ a najděte normálu ke grafu f v tomto bodě.
   Vypočítejte přibližně (pomocí lineární aproximace) hodnotu
   v příkladu a): $f(1{,}04;3{,}008)$ a v příkladu b): $f(-0.04;0{,}02)$.

2. Ještě opakování základních „slovíček“:
   Je dána funkce f a bod (x_0,y_0) :

   i) $f(x,y)=4\sqrt{1-\frac{y}{x+1}}$, $(x_0,y_0)=(0,-3)$

   ii) $f(x,y)=\arcsin\left(x^2-y\right)$, $(x_0,y_0)=(1,1)$

   a) Najděte a načrtněte její definiční obor, vyšetřete spojitost funkce f v definičním oboru .
   b) Vypočítejte $\nabla f(x_0,y_0)$.
   c) Ukažte, že funkce f je diferencovatelná v bodě (x_0,y_0) a určete v tomto bodě totální diferenciál funkce f.
   d) Napište lineární aproximaci funkce $f(x,y)$ v okolí bodu (x_0,y_0).
   e) Napište rovnici tečné roviny a normály ke grafu f v bodě $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$.

3. Jsou-li funkce $f,g:D\subseteq R^n\to R$, bod a je uvnitř D a funkce f,g mají v bodě a totální diferenciál, ukažte, že pak $d(fg)(a)=g(a)\cdot df(a)+f(a)\cdot dg(a)$
   (asi pomůže, když ukážete, že $\nabla(fg)(a)=g(a)\cdot\nabla f(a)+f(a)\cdot\nabla g(a)$).

4. Najděte „vzorec“ pro přibližné určení relativní chyby ($\frac{\Delta f}{f}$) výpočtu veličiny f, když

   a) $f(u,v)=uv$; b) $f(u,v)=\frac{u}{v}$.

   Zkuste určit relativní chybu (výpočtu) doby kmitu matematického kyvadla $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

5. a) Ukažte, že funkce $f(x,y,z)=\left(x^2+e^y, x+y.\sin z\right)$ má totální diferenciál v bodě $(1,1,0)$ a napište totální diferenciál v tomto bodě.

   b) Najděte Jacobiho matici a totální diferenciál (všude, kde existuje) funkcí :
   i) $f(r,\varphi)=(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$; ii) $f(r,\varphi,z)=(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$;
   iii) $f(r,\varphi,z)=(r\sin\vartheta\cos\varphi,\ r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta)$;
   iv) $f(x,y)=(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2})$.

Derivace složené funkce více proměnných:

1. „Technika derivování – předpokládáme, že platí předpoklady pro užití „řetízkového“ pravidla (jaké to jsou předpoklady?)

a) Je-li $g(t) = f(\sin t, t^2)$, určete $g'(t)$ a $g''(t)$ pro obecnou funkci f a pak pro $f(x,y) = x^y$.

b) Určete $g'(x)$ a $g''(x)$, je-li $g(x) = F(x, \varphi(x))$.

c) Určete parciální derivace 1.a 2. řádu funkce g, je-li

(i) $g(x,y) = f(x^2 y, \frac{x}{y})$; (ii) $g(x,y) = f(x^2 + y^2, xy, \frac{y}{x})$; (iii) $g(x,y,z) = f(\frac{x}{y}, \frac{y}{z})$

d) Určete parciální derivace 1. a 2. řádu funkce $g(x,y) = F(x, y, \varphi(x,y))$.

a užití :

2. Najděte funkci $f(x,y)$, která splňuje parciální diferenciální rovnici $x \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - y \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 0$ pomocí transformace rovnice do polárních souřadnic $x = r\cos\varphi, x = r\sin\varphi$, $r \in (0,\infty)$, $\varphi \in [0,2\pi]$.

3. Najděte řešení $u(t,x)$ pro $t \geq 0$ a $x \in R$ vlnové rovnice $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ ($a > 0$), které splňuje počáteční podmínky $u(0,x) = \varphi(x)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(0,x) = \psi(x)$ pro $x \in R$, pomocí transformace $\xi = x - at$, $\eta = x + at$.